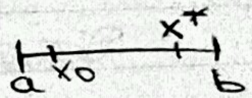
15.10.14

Θεώρημα (της συστολής) $\varphi \in C[a,b]$ συνεχώς παραγωγ.

Έστω $\varphi: [a,b] \to [a,b]$ συστολή στο διάστημα $[a,b]$ με σταθερά L τότε φ έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο στο $[a,b]$.

Αν $x_0 \in [a,b]$ τότε η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ που παράγεται από την $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ είναι καλώς ορισμένη ($x_n \in [a,b]$ $n \in \mathbb{N}$) και συγκλίνει στο σταθερό σημείο x^*. Επιπλέον, ισχύουν:

(1) $|x_n - x_*| \leq L^n |x_0 - x_*| \leq \max(x_0 - a, b - x_0)$



(2) $|x_n - x_*| \leq \frac{L^n}{1-L} \cdot |x_1 - x_0|$

(3) $|x_n - x_*| \leq \frac{L}{1-L} \cdot |x_n - x_{n-1}|$

Απόδειξη.

Αν $\varphi: [a,b] \to [a,b]$ τότε $\exists\, x^* \in [a,b]$ σταθερό σημείο (το αποδείξαμε με την άλλη φορά)

Έστω x^*, y^* σταθερά σημεία της φ, τότε:

$|x^* - y^*| = |\varphi(x^*) - \varphi(y^*)| \leq L\,|x^* - y^*| < |x^* - y^*|$ Άτοπο!

$\varphi: [a,b] \to [a,b]$ τότε αν $y_0 \in [a,b] \to x_1 = \varphi(x_0) \in [a,b]$ επαγωγικά $x_n \in [a,b]$.

$|x_n - x_*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_*)| \leq L\,|x_{n-1} - x_*| \leq L^2 |x_{n-2} - x_*| \leq \dots \leq L^n \cdot |x_0 - x_*|$. Το L^n μηδενική ακολουθία $\Rightarrow |x_n - x_*|$ είναι μηδενική ακολουθία $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_*$

• $|x_{n+1} - x_n| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| \leq L \cdot |x_n - x_{n-1}| \leq L^2 \cdot |x_{n-1} - x_{n-2}| \dots \leq L^n \cdot |x_1 - x_0|$.

• $|x_{n+k} - x_n| \leq |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \leq$

$(L^{n+k-1}+L^{n+k-2}+\dots+L^n)|x_1-x_0| = L^n\cdot(L^{k-1}+L^{k-2}+\dots+1)\cdot|x_1-x_0|$
$= L^n \frac{1-L^k}{1-L}\cdot|x_1-x_0| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|.$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=|x-x_n|$. συνεχής.
$|x_n - x^*| = |\lim_{k\to\infty} x_{n+k} - x_n| = \lim_{k\to\infty} |x_{n+k} - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$

Αν θέσουμε $y_0 = x_{n-1}$, $y_1 = G(y_0) = G(x_{n-1}) = x_n$

Θέτοντας $n=1$ στην (2)
$|y_1 - x^*| \leq \frac{L^2}{1-L}\cdot|y_1-y_0|$

Άσκηση (Από διχοτόμηση)
2.1 (Βιβλίο Ακρίβη-Δουγαλή).
Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=x^3-x-1$ έχει μόνο μια πραγμ. ρίζα που βρίσκεται στο διάστημα $[1,2]$. Με $[a,b]=[1,2]$ υπολογίστε τη δεύτερη προσέγγιση της μεθόδου διχοτόμησης. Πόσα βήματα της μεθόδου απαιτούνται για τον υπολογ. της προσέγγισης που απέχει 10^{-6} το πολύ από την x^*;

Λύση.
$f(1)=\cancel{1}-\cancel{1}-1=-1<0$, $f(2)=2^3-2-1=5$, $\operatorname{sgn}f(1) \neq \operatorname{sgn}f(2) \Rightarrow$
$\exists$ ρίζα $\xi\in[1,2]$

$f'(x)=3x^2-1$, $f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}, +\frac{\sqrt{3}}{3}$ ρίζες της f'.

$f'(x)>0$ εκτός ριζών, δηλ. στο $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$, $f'(x)<0$ $x\in(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$
$f'(x)>0$ $x\in(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$

$f(x)$ αύξουσα στο $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$ με $f(-\frac{\sqrt{3}}{3})=(-\frac{\sqrt{3}}{3})^3-(\frac{\sqrt{3}}{3})-1=$
$\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}-1=\frac{2\sqrt{3}}{9}-1<0 \Rightarrow \operatorname{sgn}f(x)=-1, x\in(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$.

$\operatorname{sgn}f(x)=-1$, $x\in(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$, $f(x)$ γν. αύξουσα στο $(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty)$.
με $\operatorname{sgn}\lim_{x\to\infty}f(x)=+1 \Rightarrow \exists$ μοναδική ρίζα

Επαναλήψεις

$- x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5.$

$f(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^3 - \frac{3}{2} - 1 = \frac{27}{8} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{7}{8} > 0. \Rightarrow x^* \in [1, \frac{3}{2}].$

$- x_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25.$

$\varepsilon = 10^{-6}$, $n \geq \log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) / \log 2 = \log 10^6 / \log 2 = 6/0.301 = 19.9316$

Το μικρότερο δυνατό n είναι 20. $\approx$ Το ακέραιο άνω μέρος.